7. Реалізація статичної оптимізації в системах керування.

Для розв'язку завдань статичної оптимізації при керуванні технологічними процесами можуть застосовуватися наступні підходи:

1) Визначення оптимальних умов з використанням повної математичної моделі (керування по моделі).
2) Застосування спрощених математичних моделей з аналітичним розв'язком і використання методів розпізнавання ситуації для вибору моделі.
3) Розв'язок завдання оптимізації поза контуром керування й уточнення знайденого алгоритму в процесі функціонування системи залежно від величини збурень.
4) Розв'язок завдання статичної оптимізації за допомогою пошуку оптимуму безпосередньо на об'єкті керування.

Перераховані методи мають різні переваги і недоліки. Відзначимо, що перший метод припускає використання ефективної обчислювальної техніки, четвертий – найповнішу можливість спостереження, третій – пов'язаний із дуже великими витратами у підготовчій фазі.

Нижче будуть розглянуті стратегії розв'язку задачі статичної оптимізації за допомогою методів 1 та 2.

7.1. Оптимізація процесу за допомогою математичних моделей

У зв'язку із надзвичайною складністю повних математичних моделей, що описують сучасні виробництва, неможливо, як правило, знайти остаточний розв'язок завдання оптимізації. Необхідно прагнути до декомпозиції завдання оптимізації у зв'язку з тим, що з боку експлуатаційного персоналу підприємства висуваються вимоги до збільшення швидкодії й зменшенню обсягу пам'яті ЕОМ, зайнятий оптимізаційними алгоритмами і програмами.

7.1.1. Оптимізація на основі методів розпізнавання ситуації

Математичні моделі адекватно описують одну більш-менш вузьку область із загальної області можливої зміни керуючих впливів. Тому коефіцієнти моделі процесу повинні встановлюватися залежно від значень змінних стану та керування. Це завдання може бути частково вирішене за допомогою алгоритмів розпізнавання ситуації, у тому випадку якщо відмовитися від уточнення моделі й обмежитися описом процесу по класах.

При цьому кожен клас стану процесу описується відповідною математичною моделлю.

Ситуація.

Під ситуацією розуміється сукупність всіх характеристик стану процесу на певний момент *t;* характеристики складаються системою керування на основі інформації про процес і її обробки.

Розпізнавання ситуації.

Розпізнавання ситуації як методика ідентифікації вирішує два основні завдання:

- ✓ включення вектора стану процесу в обмежений, не порожній ряд натуральних або семантичних класів;
- ✓ розпізнавання й інтерпретація змін стану, які ведуть від бажаних умов проведення процесу до небажаного.

Оптимізацію процесу можна розділити на дві фази.

Попередня оптимізація (режим off-line).

Попередньо визначається оптимальне керування для різних класів стану. При цьому можуть застосовуватися будь-які як завгодно складні методи оптимізації. Оптимальні керуючі впливи зберігаються в запам'ятовувальному пристрої ЕОМ.

<u>Оптимізація в ході технологічного процесу (режим on-line).</u>

Відповідно до поточного стану знаходиться оптимальне керування. При цьому після визначення належності вектора стану до того або іншого класу здійснюється уточнення обраної моделі.

В умовах сучасного підприємства застосовні наступні стратегії оптимізації:

A) Розв’язок повного завдання оптимізації по уточненій глобальній моделі.

До отримання результатів використовується оптимальне керування, отримане для представників різних класів.

B) Ітеративне уточнення рішення повного завдання оптимізації.

Оптимальне керування отримане для представників різних класів використовується в якості вихідного.

C) Розв’язок спрощеного завдання оптимізації для уточненої глобальної моделі.

Існують наступні варіанти спрощення, які можна комбінувати:

- ✓ спрощення цільової функції;
- ✓ зменшення розмірності вектора керування;
- ✓ зневага перешкодами.

Спрощення здійснюється на підставі результатів розв’язку завдання оптимізації для відповідних класів стану в режимі *off-line.* Результати розв’язку спрощеного завдання оптимізації повинні бути доповнені результатами оптимізації в режимі *off-line.*

D) Ітеративне наближення оптимального керування для уточненої глобальної моделі на основі спрощеної постановки завдання. Результати розв’язку завдання оптимізації для представників різних класів використовуються як вихідний розв’язок.

Застосування якогось із цих методів для оптимізації в режимі *on-line* залежить від конкретних умов, складності завдання оптимізації (виду цільової функції, складності математичної моделі, розмірності векторів стану і керування), а також від чутливості цільової функції до керуючих впливів.

Досвід показує, що за допомогою методів C і D можна значно скоротити час розрахунків, але в порівнянні з методами A і B практично завжди буде отримане менш ефективне керування. Вибір методу здійснюється залежно від можливостей обчислювальної техніки, необхідного часу досягнення екстремуму цільової функції і бажаних результатів оптимізації.

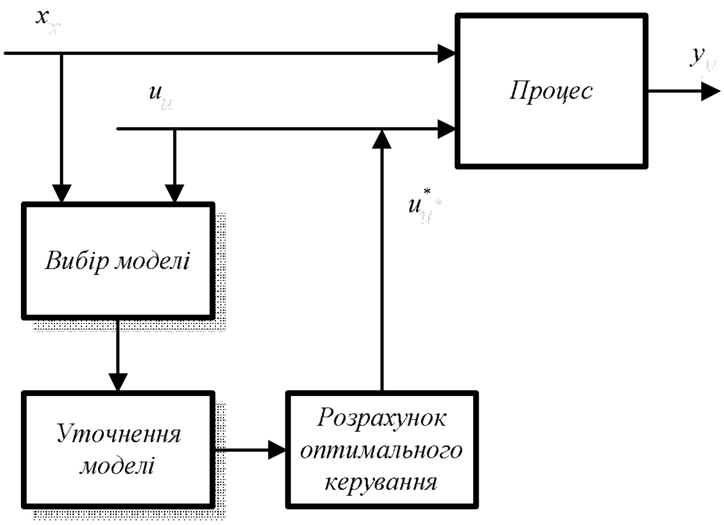

Рис. 7.1. *Принципова схема попередньої оптимізації*

Принципова схема попередньої оптимізації з математичною моделлю показана на рис. 7.1. З урахуванням вимірюваних величин збурень, вектору стану процесу $\vec{x} = | x_1, x_2, ..., x_n |$ і вектору керування $\vec{u} = | u_1, u_2, ..., u_S |$ здійснюється вибір моделі і її уточнення. Від операції вибору моделі можна відмовитися. У цьому випадку опис процесу здійснюється за допомогою однієї моделі, що підлягає уточненню.

Застосування методів розпізнавання ситуації пов'язане з наступними істотними перевагами:

- ✓ можливе сильне спрощення математичної моделі процесу;
- ✓ значне зниження часу реакції системи керування на збурення;
- ✓ підвищення надійності внаслідок модульної організації програмного забезпечення;
- ✓ знижена потреба в обсязі пам'яті ЕОМ.

Завдяки цим перевагам на практиці можлива реалізація досить складних систем керування технологічними процесами. Оптимальні значення керуючих впливів $\vec{u}^*$ видаються автоматично або через оператора в систему керування технологічним процесом.

Характерним освоєнням цієї стратегії оптимізації є компенсація величин збурень до того, як вони почнуть впливати на технологічний процес.

7.1.2. Декомпозиційна оптимізація.

Декомпозиційна оптимізація заснована на розкладанні (декомпозиції) завдання оптимізації виробничого процесу. Зміст цього методу полягає в тому, що загальне завдання оптимізації наводять у вигляді ряду конкретних завдань. Вирішують ці завдання незалежно одне від одного і координують їх розв’язки таким чином, щоб задовольнити постановці загального завдання оптимізації (рис. 7.2).

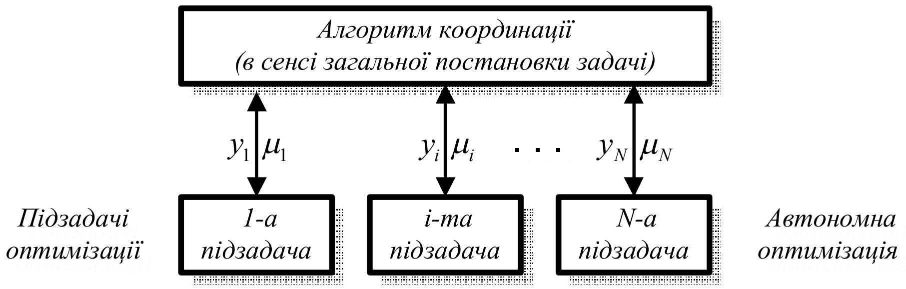

Рис. 7.2. *Декомпозиційна оптимізація*

Декомпозиційна оптимізація широко застосовується в керуванні технологічними процесами в основному з двох причин:

- для складних завдань оптимізації не існує одного надійного методу розв’язку;
- більша розмірність завдання оптимізації (до 15 і більше керуючих змінних) призводить до неприйнятного часу розв’язку завдання.

Крім того, знайдений розв’язок загального завдання може бути реалізовано за допомогою складних алгоритмів керування за допомогою ЕОМ, що, як правило, пов'язано з обмеженою надійністю системи.

Реалізація алгоритмів керування, що відповідають розв’язкам конкретних завдань, і їхня наступна координація зменшує можливість помилки.

Розглянемо наступну постановку завдання:

$$\max I = \max \sum_{i=1}^{N} F_i(\vec{x_i}, \vec{u_i}), \tag{7.1}$$

при умовах:

$$\vec{x_i} = \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \cdot \vec{y}_j, \tag{7.2}$$

$$\vec{y}_j = \vec{f}_i(\vec{x_i}, \vec{u_i}),\ i = 1, 2, ..., N. \tag{7.3}$$

Тут (рис. 7.3):

$\vec{u_i}$ - вектор керування *i*-ї конкретної підсистеми:

$$\vec{u_i} = \{u_i^1, u_i^2, ..., u_i^{vi}\}; \tag{7.4}$$

$\vec{x_i}$ - вектор вхідних величин *i*-ї конкретної підсистеми:

$$\overrightarrow{x_i} = \{x_i^1, x_i^2, ..., x_i^{\alpha i}\}; \tag{7.5}$$

$\vec{y}_j$ - вектор вихідних величин i-ї конкретної підсистеми:

$$\overrightarrow{y_i} = \{y_i^1, y_i^2, ..., y_i^{\beta i}\}; \tag{7.6}$$

c_{ij} - матриця зв'язку.

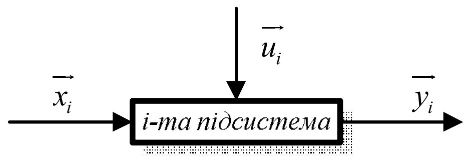

Рис. 7.3. *Модель підсистеми*

Необхідно оптимізувати *Н-східчасту* систему, у якій кожен щабель впливає на загальну ефективність системи. Окремі конкретні підсистеми пов'язані між собою через (7.2), їхні математичні моделі описуються за допомогою (7.3).

Матриця зв'язку має розмірність $\alpha_i \times \beta_i$. Вектор вхідних величин у першу підсистему $\overrightarrow{x_1}$ – задається. Для завдання (7.1) – (7.3) може бути записана функція Лагранжа:

$$R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{u}, \vec{\lambda}, \vec{\mu}) = \sum_{i=1}^{N}\{F_i(\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{u_i}) + \vec{\mu}_i^T(\sum_{j=1}^{N} c_{ij}\vec{y}_j - \overrightarrow{x_i}) + \vec{\lambda}_i^T[\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{u_i}) - \overrightarrow{y_i}]\}. \tag{7.7}$$

Умови оптимальності мають вигляд:

$$\frac{\partial R}{\partial \overrightarrow{x_i}} = \frac{\partial F_i}{\partial \overrightarrow{x_i}} - \vec{\mu}_i + \vec{\lambda}_i \left(\frac{\partial \vec{f}_i}{\partial \overrightarrow{x_i}}\right)^T = 0; \tag{7.8}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \overrightarrow{u_i}} = \frac{\partial F_i}{\partial \overrightarrow{u_i}} + \vec{\lambda}_i \left(\frac{\partial \vec{f}_i}{\partial \overrightarrow{u_i}}\right)^T = 0; \tag{7.9}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \overrightarrow{y_i}} = -\vec{\lambda}_i + \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\mu_i = 0; \tag{7.10}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \vec{\lambda}_i} = \vec{f}_i - \vec{y}_i = 0; \tag{7.11}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \overrightarrow{\mu_i}} = \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\vec{y}_{ij} - \vec{x} = 0. \tag{7.12}$$

Очевидно, що множники Лагранжа $\overrightarrow{\mu_i}$ і $\vec{\lambda}_i$ є векторами розмірності α_i (для $\overrightarrow{\mu_i}$) і β_i (для $\vec{\lambda}_i$).

Крім того:

$$\frac{\partial R}{\partial \overrightarrow{x_i}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial x_i^1} \\ \dfrac{\partial R}{\partial x_i^2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial R}{\partial x_i^{\alpha i}} \end{vmatrix}; \tag{7.13}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial \overrightarrow{x_i}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_i^1}{\partial x_i^1} & \frac{\partial f_i^1}{\partial x_i^2} & \cdots & \frac{\partial f_i^1}{\partial x_i^{\alpha i}} \\ \frac{\partial f_i^2}{\partial x_i^1} & \frac{\partial f_i^2}{\partial x_i^2} & \cdots & \frac{\partial f_i^2}{\partial x_i^{\alpha i}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_i^{\beta i}}{\partial x_i^1} & \frac{\partial f_i^{\beta i}}{\partial x_i^2} & \cdots & \frac{\partial f_i^{\beta i}}{\partial x_i^{\alpha i}} \end{vmatrix}. \tag{7.14}$$

Отримати остаточний розв’язок завдання оптимізації практично неможливо через її складність. Необхідно відзначити, що (7.8), (7.9) і (7.11) містять лише змінні відповідної i-ї підсистеми. Ця особливість дозволяє (рис. 7.2) здійснити декомпозицію й знайти розв’язок шляхом координації розв’язків для окремих підсистем (конкретних задач). Суть координації полягає в тому, що різниці між оптимальними розв’язками взаємозалежних підсистем використовуються для корекції цих рішень. Вважається, що корекція рішень здійснюється на більше високому рівні керування, тобто на рівні керування всією технічною системою, а не на рівні окремих підсистем. У зв'язку із цим декомпозиційну оптимізацію називають також *багаторівневою* або *ієрархічною оптимізацією*.

Залежно від того, через які змінні здійснюється координація розв’язків для окремих підсистем, розрізняють два методи.

Метод I.

Координація здійснюється по множниках Лагранжа $\overrightarrow{\mu_i}$. Алгоритм розв’язку:

1) Вибір значень для множників Лагранжа: $\overrightarrow{\mu_1}, \overrightarrow{\mu_2}, ..., \overrightarrow{\mu_N}$.

2) Визначення множників Лагранжа $\overrightarrow{\lambda_1}, \overrightarrow{\lambda_2}, ..., \overrightarrow{\lambda_N}$ з (6.46).

3) Визначення величин $\overrightarrow{x_i}$, $\overrightarrow{u_i}$ і $\overrightarrow{y_i}$ із розв’язку системи рівнянь (7.8), (7.9), (7.11).

4) Уточнення $\overrightarrow{\mu_i}$ із застосуванням умови (6.48)

$$\overrightarrow{\mu_i}^{\nu+1} = \overrightarrow{\mu_i}^{\nu} + h \cdot (\sum_{j=1}^{N} c_{ij} \overrightarrow{y_j} - \overrightarrow{x_i}) \tag{7.15}$$

і перехід до п.2. Умовою закінчення процесу координації є виконання співвідношення:

$$\sum_{j=1}^{N} c_{ij} \overrightarrow{y_j} - \overrightarrow{x_i} \le \vec{\varepsilon}, \tag{7.16}$$

де $\vec{\varepsilon}$ характеризує задану точність розв’язку. Величина h в (7.15) визначає довжину кроку. Розв’язок завдань оптимізації для окремих підсистем можна отримати за допомогою будь-яких методів. У п. 3 використаються необхідні умови оптимальності. При фіксованих $\overrightarrow{\mu_i}$, $\overrightarrow{\lambda_i}$ можуть використовуватися пошукові методи. Великим недоліком цього методу є те, що він не дає допустимих розв’язків у змісті постановки завдання (7.1) – (7.3).

Метод II.

Координація здійснюється по вихідних величинах $\overrightarrow{y_i}$. Алгоритм розв’язку:

1) Визначення значень вихідних величин $\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}, ..., \overrightarrow{y_N}$.

2) Розв’язок системи рівнянь (7.8), (7.9), (7.11), (7.12) і знаходження величин $\overrightarrow{x_i}$, $\overrightarrow{u_i}$, $\overrightarrow{\mu_i}$, $\overrightarrow{\lambda_i}$.

3) Корекція $\overrightarrow{y_i}$ з використанням (7.10)

$$\vec{y}_i^{\nu+1} = \overrightarrow{y_i}^{\nu} + h(-\lambda_i + \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \overrightarrow{\mu_j}) \tag{7.17}$$

і перехід до п. 2. Умовою закінчення процесу координації є виконання співвідношення:

$$-\lambda_i + \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \vec{\mu}_j \le \vec{\varepsilon}. \tag{7.18}$$

На противагу методу I у цьому випадку отримують допустимий розв’язок, тому що рівняння (7.3) і співвідношення зв'язку (7.2) виконуються при кожному послідовному наближенні. Корекція відповідно до (7.17) поліпшує кожен проміжний розв’язок відповідно до цільової функції (7.1). Розглянутий метод придатний для оптимізації в режимі *on-line*, тому що процес оптимізації може бути припинений після будь-якого послідовного наближення. Отримане в цей момент субоптимальний розв’язок є більш ефективним, ніж кожен знайдений раніше.

На закінчення необхідно вказати на одне обмеження. При визначенні $\vec{y}_i$ з умови (7.12) визначаються також усі $\vec{x}_i$.

Умова (7.11) є системою β_i рівнянь для ν_i величини вектора $\vec{u}_i$. Наявність допустимого розв’язку для $\vec{u}_i$ можливо лише тоді, коли виконується умова $\beta_i \le \nu_i$. Інакше кажучи, метод II застосуємо для координації локальних завдань оптимізації лише тоді, коли розмірність вектору стану на виході кожної конкретної підсистеми не перевищує розмірності вектору керування відповідних підсистем.

7.2. Контрольні завдання

1. Мінімізувати функцію

$$f(x) = 40x_1 + 36x_2$$

при обмеженнях:

$$g_1(x) = x_1 - 8 \le 0;$$
$$g_2(x) = x_2 - 10 \le 0;$$
$$g_3(x) = 5x_1 + 3x_2 - 45 \ge 0;$$
$$g_4(x) = x_1 \ge 0;$$
$$g_5(x) = x_2 \ge 0.$$

2. Максимізувати функцію

$$f(x) = x_1 + 2x_2$$

при обмеженнях:

$$g_1(x) = x_1 + 2x_2 - 10 \le 0;$$
$$g_2(x) = x_1 + x_2 - 1 \ge 0;$$
$$g_3(x) = x_2 - 4 \le 0;$$
$$g_4(x) = x_1 \ge 0;$$
$$g_5(x) = x_2 \ge 0.$$

3. Максимізувати симплекс-методом функцію

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2$$

при обмеженнях:

$$g_1(x) = -x_1 + 2x_2 - 4 \le 0;$$
$$g_2(x) = 3x_1 + 2x_2 - 14 \le 0;$$
$$g_3(x) = x_1 - x_2 - 3 \le 0;$$
$$g_4(x) = x_1 \ge 0;$$
$$g_5(x) = x_2 \ge 0.$$

4. Максимізувати симплекс-методом функцію

$$f(x) = x_1 + 3x_2$$

при обмеженнях:

$$g_1(x) = x_1 - 5 \le 0;$$
$$g_2(x) = x_1 + 2x_2 - 10 \le 0;$$
$$g_3(x) = x_2 - 4 \le 0;$$
$$g_4(x) = x_1 \ge 0;$$
$$g_5(x) = x_2 \ge 0.$$